

Concursul "Grigore Moisil" Urziceni

Ediția a V-a, 30 ianuarie - 1 februarie 2009

CLASA A IX-A

Subiectul 1.

Fie $a, b, c, x, y, z \in (0, \infty)$ astfel ca $a^2 + b^2 = c^2$ și $x^2 + y^2 = z^2$. Arătați că

$$(a+x)^2 + (b+y)^2 \leq (c+z)^2.$$

* * *

Subiectul 2.

Scrieți numărul $\frac{\sqrt{\sqrt{5}+2} + \sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}$ sub forma $\frac{a+b\sqrt{c}}{d}$, cu $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.

* * *

Subiectul 3.

Determinați $a \in \mathbb{N}^*$ și $b, c, d \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$|ax^3 + bx^2 + cx + d| \leq 2, \quad \text{oricare ar fi } x \in [-2, 2].$$

Cristinel Mortici

Subiectul 4.

Pe laturile AB și AC ale triunghiului ΔABC se consideră punctele D și respectiv E , astfel încât $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EC} = \vec{0}$. Fie T intersecția dreptelor DC și BE . Determinați $\alpha \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $\overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC} = \alpha \cdot \overrightarrow{TA}$.

Gazeta Matematică

Concursul "Grigore Moisil" Urziceni

Ediția a V-a, 30 ianuarie - 1 februarie 2009

CLASA A X-A

Subiectul 1.

Rezolvați în numere complexe sistemul:
$$\begin{cases} z + w = 4 \\ (z^2 + w^2)(z^3 + w^3) = 280 \end{cases} .$$
 * * *

Subiectul 2.

Se consideră funcția $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{1-x}$.

- Demonstrați că f este crescătoare pe $[-1, 0]$ și descrescătoare pe $[0, 1]$.
- Rezolvați ecuația $f(x) = \sqrt{2} + \log_2 x$.

Cristinel Mortici

Subiectul 3.

Fie $a, b \in (0, \infty)$ cu proprietatea că $ab = 10^{\sqrt{2}}$. Arătați că $\lg^2 a + \lg^2 b \geq 1$. Când are loc egalitatea?

Revista Minus

Subiectul 4.

Fie $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ și funcția $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, definită prin $f(z) = az + b$. Demonstrați că dacă punctele de afixe z_1, z_2, z_3 sunt coliniare, atunci și punctele de afixe $f(z_1), f(z_2), f(z_3)$ sunt coliniare.

Gazeta Matematică

© _____ *Subiectele sunt elaborate de Cristinel Mortici*

Concursul "Grigore Moisil" Urziceni

Ediția a V-a, 30 ianuarie - 1 februarie 2009

CLASA A XI-A

Subiectul 1.

a) Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \dots + a_n \sin nx$, unde $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ sunt numere fixate. Demonstrați că dacă $|f(x)| \leq |\sin x|$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, atunci $|a_1 + 2a_2 + \dots + na_n| \leq 1$.

b) Arătați că pentru orice numere reale $x_1 < x_2$ și $y_1 < y_2$, avem:

$$\begin{vmatrix} e^{x_1 y_1} & e^{x_1 y_2} \\ e^{x_2 y_1} & e^{x_2 y_2} \end{vmatrix} > 0.$$

* * *

Subiectul 2.

Fie $a_0, b_0 \in (0, \infty)$ și pentru orice $n \in \mathbb{N}$, definim:

$$a_{n+1} = \frac{(a_n + 2b_n)^2}{(a_n + b_n)^2}, \quad b_{n+1} = \frac{(a_n + 2b_n)b_n}{(a_n + b_n)^2}.$$

Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

* * *

Subiectul 3.

Fie $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 21 & 0 & 3 \\ -22 & 7 & 0 \end{pmatrix}$ și presupunem că $A^{2009} = \begin{pmatrix} m & a & b \\ x & n & c \\ y & z & p \end{pmatrix}$.

a) Determinați $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ astfel încât $A^3 - \alpha A^2 + \beta A - \gamma I_3 = 0_3$.

b) Demonstrați că $m = p$ și $a + b + c = x + y + z$.

Cristinel Mortici

Subiectul 4. Calculați: $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \ln \frac{k^2 + 8k + 15}{k^2 + 8k + 12}$.

Gazeta Matematică

© _____ Subiectele sunt elaborate de Cristinel Mortici

Concursul "Grigore Moisil" Urziceni

Ediția a V-a, 30 ianuarie - 1 februarie 2009

CLASA A XII-A

Subiectul 1.

Fie $f : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă, cu f'' continuă, astfel încât $f(3) = 2$, $f'(3) = 1$ și $\int_0^3 f(x) dx = 6$. Calculați $\int_0^3 x^2 f''(x) dx$.

* * *

Subiectul 2.

Determinați funcțiile derivabile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cu proprietatea că

$$(f(x))^{2009} = \int_0^x (f(t))^{2008} dt, \quad \text{oricare ar fi } x \in \mathbb{R}.$$

Cristinel Mortici

Subiectul 3.

Determinați toate tripletele de numere complexe (p, q, r) astfel încât

$$G = \{z \in \mathbb{C} \mid z^3 + pz^2 + qz + r = 0\} \subset \mathbb{C}^*$$

să fie grup în raport cu înmulțirea numerelor complexe.

Revista Minus

Subiectul 4.

Calculați: $I = \int_{-1}^1 \frac{1}{(3+x^2)(1+e^x)} dx$.

Gazeta Matematică

© _____ *Subiectele sunt elaborate de Cristinel Mortici*